Denksysteme ohne Widersprüche

1) Einleitung

Wissenschaft beruht auf Wissen **und** auf der Möglichkeit, dieses Wissen **mit** jemandem **zu teilen**.

Wissen ist stets verbunden mit einer **Person**, im Folgenden oft mit P bezeichnet, welche dieses Wissen besitzt. Die Möglichkeit, es mit einer anderen Person zu teilen, eröffnen **Mitteilungen**, im Folgenden oft mit M bezeichnet.

Eine der ursprünglichsten Formen von Mitteilungen war wohl die akustische, eine **Sprache** im weitesten Sinn. Grundsätzlich sind aber alle Sinnesorgane geeignet, als Sender bzw. Empfänger von Mitteilungen zu dienen. Solchen Mitteilungen ist aber stets ein **endlicher Informationsinhalt** gemeinsam.

Um zu einer einfachen Darstellung der Abzählbarkeit der Menge aller möglichen Mitteilungen zu gelangen wollen wir uns hier auf **schriftliche Mitteilungen** beschränken, bemerken aber gleich dazu, dass dies in unseren Augen keine Beschränkung der Allgemeinheit von Mitteilungen darstellt. Unsere Sinnesorgane können in endlicher Zeit nur endlich viele Signale, welcher Art auch immer, empfangen. Der Umfang jeder derartigen Information ist zwar unbegrenzt, **bleibt aber stets endlich**. Die Mitteilungen sind daher aktual endlich **aber potenziell unendlich**.

Ein Objekt, welches eine Person P durch eine Mitteilung M beschreibt, bezeichnen wir als **Denkobjekt** von P, im Folgenden oft mit DO bezeichnet.

Die von uns hier betrachteten Denkobjekte müssen außerdem der folgenden Einschränkung genügen: "Die für P ein Denkobjekt beschreibende Mitteilung M muss **für P** widerspruchsfrei sein". Damit werden für den Autor Denkobjekte wie z.B. "Eine natürliche Zahl größer als 5 und kleiner als 3" ausgeschlossen.

Die eben gemachte Einschränkung der Menge der betrachteten Denkobjekte schließt "Eine natürliche Zahl größer als 5 und kleiner als 3" nicht für alle Personen ein für allemal aus sondern nur für jene Personen, für die so wie für den Autor "Eine natürliche Zahl größer als 5 und kleiner als 3" nicht widerspruchsfrei ist. Personen, deren Denksysteme widersprüchliche Argumente zulassen, werden aber aus unseren Betrachtungen nicht ausgeschlossen.

Unsere Aufgabe wird sein zu zeigen, dass die Mächtigkeit der Menge aller möglichen Denkobjekte, die durch widerspruchsfreie Mitteilungen beschrieben werden können, gleich N ist, der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen. Für die Mathematik folgt daraus unter anderem die Abzählbarkeit der reellen Zahlen. Um dies zu zeigen wollen wir zunächst eine gewisse Ordnung in die Menge aller schriftlichen Mitteilungen bringen.

2) Schriftliche Mitteilungen

Als allgemeine schriftliche Mitteilung M bezeichnen wir einen quadratischen Raster M_n, bestehend aus n^2 **Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01 mm**. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz. Wir bezeichnen n als den **Umfang der Mitteilung M_n**. Die Seitenlänge der Elementarquadrate ermöglicht es, alle praktisch in irgend einer Sprache bzw. in irgend einer Schrift übermittelten Informationen "lesbar" darzustellen. Alle mathematischen Sätze oder Formeln, die auf eine Tafel geschrieben oder in einem Buch gedruckt werden können, lassen sich in die Form einer solchen Mittelung M_n bringen. Insbesondere von allfälligen Kritikern unserer vorliegenden Arbeit werden wir verlangen, dass sie diese Kritik schriftlich in Form einer Mitteilung M_n äußern.

Wir ordnen alle derartigen Mitteilungen M_n folgendermaßen abzählbar an: Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1 zu, einem schwarzen die Ziffer 0. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 0), die dem in der j^{ten} Zeile von M_n an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. M_n wird dann durch die Dezimalzahl

$$\mathbf{a(M_n) = 0,a_{11}a_{12} \ldots a_{1n}a_{21}a_{22} \ldots\ldots a_{jk} \ldots\ldots a_{nn}}$$

eindeutig gekennzeichnet. Nun fassen wir zunächst alle Mitteilungen M_n gleichen Umfanges n in Gruppen $G(M_n)$ zusammen die wir nach der Größe von n anordnen. Innerhalb jeder dieser Gruppen ordnen wir die einzelnen Mitteilungen M_n nach der Größe der sie eindeutig kennzeichnenden Dezimalzahlen $a(M_n)$ an. Die daraus erhaltene abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen M bezeichnen wir mit **AO(M)**.

Gemäß 1) liegt für uns der Sinn einer Mitteilung in der Übertragung von Wissen von einer Person an eine andere. Bisher haben wir ein solches Wissen noch nicht spezifiziert. Wir wählen jetzt als Beispiel das Denkobjekt DO "natürliche Zahl". Für eine Beschreibung dieses Denkobjektes können wir verschiedene Schriftarten und verschiedene Schriftgrößen verwenden. Außerdem kann jede natürliche Zahl n in verschiedener Art und Weise beschrieben werden. So kann etwa n durch $2n/2, 3n/3, \sqrt[2]{n^2}$, etc. beschrieben werden. Jede natürliche Zahl n wird schon allein deshalb durch unendlich viele Mitteilungen beschrieben.

Gleiches gilt für jedes beliebige Denkobjekt DO. In der abzählbaren Anordnung aller möglichen Mitteilungen AO(M) treten alle ein bestimmtes Denkobjekt DO beschreibenden Mitteilungen unendlich oft auf. Da der Sinn jeder Mitteilung in der Übertragung von Wissen an eine Person liegt wollen wir im Folgenden alle möglichen Personen P in unsere Überlegungen einbeziehen. Dabei wird es sich als notwendig erweisen auch den Zeitpunkt des Lesens einer derartigen Mitteilungen zu berücksichtigen.

3) Relativ wahre Mitteilungen

Wir bezeichnen eine Mitteilung M dann und nur dann als **relativ wahr bezüglich einer Person P und einem Zeitpunkt T** wenn M von P in T als wahr beurteilt wird. Dabei setzen wir nicht voraus, dass M von P in T tatsächlich gelesen wird. Vielmehr bezeichnen wir M bezüglich P und T auch dann als wahr wenn P in T dieses Urteil fällte hätte er M in T tatsächlich gelesen.

Alle möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M lassen sich durch ein **Tripel (P,T,M)** eindeutig kennzeichnen. Das Tripel (P,T,M) soll dabei bedeuten, dass die Person P falls sie im Zeitpunkt T die Mitteilung M liest bzw. gelesen hätte M als wahr bezeichnet.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, dass P sein Urteil "wahr" über die Mitteilung M während einer Mindestdauer MD von einer Minute aufrecht hält. Alle von einem ausdrücklichen "wahr" abweichenden Urteile über eine Mitteilung M werden als Urteil "nicht wahr" gewertet. Ob P bei seinem Urteil irrt, ob er sein Urteil "wider besseres Wissen" abgibt oder ob er die Abgabe eines Urteils überhaupt verweigert spielt dabei keine Rolle.

4) Individualanordnung

Um zu einer abzählbaren Anordnung aller relativ wahren Mitteilungen zu gelangen bilden wir zunächst eine Struktur innerhalb des **Raum-Zeit-Universums RZU** (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate). Das RZU kann durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in **vierdimensionale Elementarwürfel EW der Seitenlänge 1 mm und der Dauer von 1 Sekunde** zerlegt werden. Diese Menge von Elementarwürfeln EW kann unschwer abzählbar angeordnet werden. Die Anordnung bezeichnen wir mit **AO(EW)**.

In 3) haben wir verlangt, dass P ein Urteil "wahr" über eine Mitteilung M während einer Mindestdauer MD von einer Minute aufrecht hält. Da P bei der Abgabe seines Urteils in T einen seinem Körpervolumen entsprechenden Teil der Raumdimension - nennen wir ihn RD(P,T) - in Anspruch nimmt gibt es (mindestens) einen Elementarwürfel EW(P,T,M) der jedes Urteil "wahr" eindeutig kennzeichnet. Dies leistet nämlich jeder Elementarwürfel dessen dreidimensionale Raumdimension RD(EW) zur Gänze in RD(P,T) und dessen eindimensionale Zeitdimension ZD(EW) zur Gänze in MD liegt.

Aus der abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen gemäß 2) und der abzählbaren Anordnung aller Elementarwürfel AO(EW) gewinnt man eine abzählbare Anordnung **AO(P,T,M)** aller möglichen Urteile "wahr" die irgendeine Person P in irgendeinem Zeitpunkt T über irgendeine Mitteilung M fällen kann. Im Hinblick auf die Personenabhängigkeit dieser Anordnung nennen wir sie **Individualanordnung.**

5) Individualanordnung beliebiger Mengen

Wir betrachten eine beliebige Menge **$\mathcal{M}$ = $\mathcal{M}$(Ɛ)** von Elementen **E = E_ε**, die dadurch definiert ist, dass sie aus allen Denkobjekten DO(Ɛ) besteht, welche die Eigenschaft Ɛ besitzen. Wir verlangen also für jedes Element E_ε, dass es irgendeine Person P gibt die in irgendeinem Zeitpunkt T die Mitteilung M(E_ε): "E besitzt die Eigenschaft Ɛ" als wahr bezeichnet.

Als Beispiel denke man etwa an die Eigenschaft Ɛ:"eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zu sein". Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit R(0,1) und die Mitteilung M(E_ε) mit M[R(0,1)]. Analog 3) bedeute das **Tripel {P,T,M[R(0,1)]}**, dass die Person P im Zeitpunkt T die Aussage **"M[R(0,1)] beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei"** als "wahr" bezeichnet.

Analog 4) gewinnt man eine abzählbare Anordnung **AO{P,T,M[R(0,1)]}** aller möglichen Urteile "wahr" die irgendeine Person P in irgendeinem Zeitpunkt T über die Aussage "M[R(0,1)] beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei" fällen kann und wir bezeichnen diese Anordnung als **Individualanordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1**.

Für den allgemeinen Fall beliebiger Mengen **$\mathcal{M}$(Ɛ)** von Elementen **E_ε** soll das **Tripel [P,T,M(E_ε)]** bedeuten, dass die Person P im Zeitpunkt T die Aussage **"M(E_ε) beschreibt ein Element der Menge $\mathcal{M}$(Ɛ) eindeutig und widerspruchsfrei"** als "wahr" bezeichnet. Diese

Tripel lassen sich ebenfalls analog 4) in eine abzählbare Anordnung **AO[P,T,M(E_ε)]** bringen die wir als **Individualanordnung der Menge $\mathcal{M}(\mathcal{E})$** bezeichnen.

Jede Individualanordnung enthält also alle Fälle in denen irgend eine Person P in irgendeinem Zeitpunkt T die Aussage "M(E_ε) beschreibt ein Element der Menge $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ eindeutig und widerspruchsfrei" als "wahr" bezeichnet.

Für eine tatsächliche Anordnung ist aber damit nichts gewonnen. Zwar könnte eine eindeutige Anordnung dadurch erhalten werden, dass man die Elemente in jene Reihenfolge bringt, in der sie in der Individualanordnung **das erste Mal** auftreten. Aber einerseits beruht die Individualanordnung auf den Urteilen "wahr" oder "nicht wahr" von Personen P die noch nicht geboren oder bereits verstorben sind, andererseits müssen Urteile über Mitteilungen betrachtet werden, deren Umfang die Lesbarkeit im Laufe eines Menschenlebens übersteigt. Wir begnügen uns daher mit der Feststellung, die Mächtigkeit der Individualanordnung ist N, ohne auf die Reihenfolge der Elemente E_ε in AO[P,T,M(E_ε)] näher einzugehen.

6) Vollständigkeit der Individualanordnung

In 5) haben wir gesehen, wie beliebige Mengen eindeutig und widerspruchsfrei beschriebener Elemente in Individualanordnungen abzählbar angeordnet werden können. Dies steht im Widerspruch zu den zahlreichen überabzählbaren Mengen die in der Mathematik behandelt werden. **Wir werden zeigen, dass die Individualanordnungen insoweit vollständig sind als jede angeblich eindeutige und widerspruchsfreie Beschreibung eines in der Individualanordnung einer Menge nicht enthaltenen Elementes dieser Menge zu einem Widerspruch führt.**

Es sei die Person P = P_K jener Kritiker der Vollständigkeit der Individualanordnung einer Menge der in einem Zeitpunkt T = T_K behauptet ein eindeutig und widerspruchsfrei beschriebenes Element E_ε von $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ sei in AO[P,T,M(E_ε)] nicht enthalten. Wir bezeichnen dieses kritische Element mit E_K und verlangen von P_K uns die E_K eindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M_K = M(E_K) bekannt zu geben. Kommt P_K dieser Aufforderung nach dann bezeichnet er im Zeitpunkt T_K die Aussage: "Die Mitteilung M(E_K) beschreibt das Element $E_K \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ eindeutig und widerspruchsfrei" als "wahr".

Damit gerät P_K in einen Widerspruch. Kern seiner Kritik ist ja die Aussage, das Element E_K sei nicht in der Individualanordnung enthalten und diese daher unvollständig. Daraus folgt:

$$[P_K,T_K,M(E_K)] \notin AO[P,T,M(E_\varepsilon)].$$

Andererseits argumentiert P_K, die Mitteilung M(E_K) beschreibe in T_K das Element E_K eindeutig und widerspruchsfrei. Damit ist aber E_K per definitionem Element der Individualanordnung und es gilt somit

$$[P_K,T_K,M(E_K)] \in AO[P,T,M(E_\varepsilon)]$$

im Widerspruch zur vorherigen Feststellung.

Es ist P_K also nicht gelungen, das für seine Argumentation notwendige kritische Element E_K wie gefordert widerspruchsfrei zu beschreiben.

7) Schlussbemerkungen

Denkobjekte von Wissenschaften sollten widerspruchsfrei sein. Tritt in einem Denksystem ein Widerspruch auf besteht eine Lösung darin den zugrunde liegenden widersprüchlichen Begriff zu eliminieren. Ein Beispiel dafür ist etwa der Begriff "Menge aller Mengen". Eine andere Möglichkeit einen Widerspruch aufzulösen besteht in dem Versuch These und Antithese in einer Synthese zu verbinden wie in der Teilchenphysik Korpuskel und Welle.

Unser Zugang zur Welt der Denkobjekte führt über unsere Sinnesorgane und ist daher empirisch geprägt. Sowohl in der Physik der Elementarteilchen als auch in der Astrophysik zeigt sich aber, dass die "Anschaulichkeit" von Modellen oft deren Leistungsfähigkeit im Wege steht. Unsere überlieferte Vorstellung von "Realität" erweist sich manchmal als hinderlich. Die Gegenüberstellung der "These: Korpuskel" zur "Antithese: Welle" löst man statt mit "entweder oder" besser mit der Synthese "sowohl als auch" und zwar in Abhängigkeit von der Methode der **Beobachtung** des Teilchens. Die Frage, ob Schrödingers Katze in einem Zeitpunkt vor Öffnung ihres Behältnisses lebendig oder tot war, ist insoweit nicht sinnvoll als die Realität ihres Zustandes in diesem Zeitpunkt nicht beobachtbar war.

Der Begriff "absolute Realität" ohne Bezugnahme auf eine diese Realität beobachtende Person kann im jeweiligen Denksystem zu Widersprüchen führen. Es ist daher sinnvoller so wie bei dem Begriff "relativ wahre Mitteilung" nur jeweils von "relativer Realität" bezogen auf eine bestimmte Person P und auf einen bestimmten Zeitpunkt T der Beobachtung zu sprechen. Damit gerät der Begriff "Realität" in Abhängigkeit von P und T und lässt sich letztlich analog 5) in eine abzählbare Anordnung bringen. Vereinfacht ausgedrückt: **Die Welt ist abzählbar, jedes überabzählbare Mengen enthaltende Denksystem enthält widersprüchliche Urteile über die Wahrheit von Mitteilungen und ist für Wissenschaft im Allgemeinen und für Mathematik im Besonderen ungeeignet.**